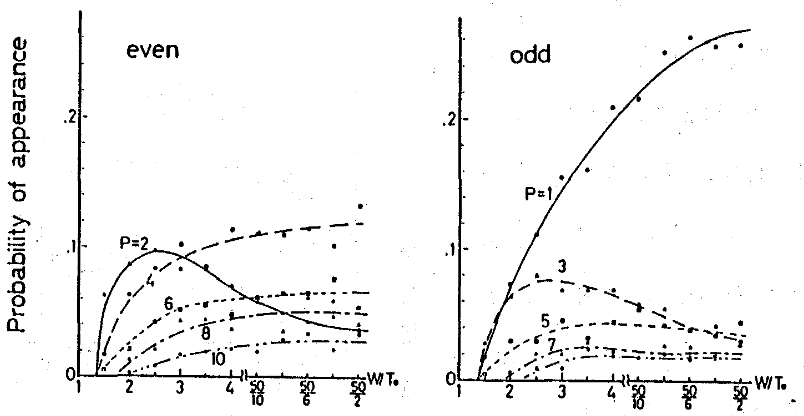

図2

周期解は最大値を経て 0.04 付近に落ち着く。他の解はそれぞれの値に飽和する傾向を示す。なお参考のためニューロンを正方格子に並べ，最近接間を複線の軸索で結合したネットワーク（周期的境界条件付加）の統計的性質を調べた所，4周期解が圧倒的に多く（頻度 0.5 に達する）他の偶数周期解は最大でも 0.1 程度，奇数周期解は無視し得る程少なかった（その後，複線の軸索結合がこの状況をもたらす主要因であることが判った）。

最後に結合定数 C_j やしきい値 T_0 に揺らぎを導入したり，いくつかのニューロンを欠落させたRNNMの振舞いを調べた所，このような摂動に対しネットワークの秩序構造は予想以上にrigidに保持されることが判明した。

位相乱流方程式に関するコメント

京大・基研　蔵　本　由　紀

方程式

$$\dot{\phi} = \nu\phi_{xx} + \mu\phi_x^2 - \lambda\phi_{xxxx}, \quad \lambda > 0 \tag{1}$$

は，$\nu < 0$ の場合には空間的時間的カオス，即ち乱流を示す最も単純な非線形偏微分方程式として知られ[1]，その詳しい数値解析（システム長 L の関数としてのリヤプノフ・スペクトル，リヤプノフ次元，エントロピー等）が実行されている[2]。$\nu > 0$ の場合には ϕ_{xxxx} 項は重要でなく，バーガース方程式と等価な非線形拡散方程式

$$\dot{\phi} = \nu\phi_{xx} + \mu\phi_x^2 \tag{1$'$}$$

が得られる。これらの方程式(及びその2，3次元への拡張)はもともと反応拡散方程式 $\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})+D\triangle\boldsymbol{X}$ に対して，特に局所系 $\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ が安定なリミットサイクル解 $X_0(\omega t+\phi)$ (ϕ: 任意定数)をもつ場合に得られたものである。即ち，ϕ が緩やかな時空依存性をもつものと解釈し，$X_0(\omega t+\phi(\boldsymbol{r}, t))$ がなお近似的に上の反応拡散方程式を満足する場合に ϕ が従うべき方程式が(1)及は(1)$'$なのである。$\nu<0$ は空間的に一様なリミットサイクル振動が不均一な乱れに対して不安定化する状況に対応している。このような位相ダイナミックスにもとづいて振動反応拡散系の波動パターンの発展や自発的乱れの発生などを議論することができる。[1] なお，ϕ_x^2 項は，位相の勾配を生じることによって局所的な振動数 $(=\dot{\phi})$ を調節できるという系の＜能力＞を反映しており，これによってBelousov-Zhabotinskii反応系にみられるようなターゲットパターンやスパイラルパターン等の同期パターンがはじめて可能となるのである。

さて，(1)(1)$'$は次のような振動子格子模型からも導くことができる。1次元格子(格子点間隔 a)の各格子点上に同一のリミットサイクル振動子を配置し，各振動子を近接のものと相互作用させる。参考文献(3)で示したように，弱い相互作用の下では i 番目の振動子の位相 $\psi_i\equiv\omega t+\phi_i$ に対してごく一般的に次の方程式が成立つ。

$$\dot{\phi}_i=\sum_j\Gamma_{ij}(\phi_i-\phi_j). \tag{2}$$

ここに，$\Gamma_{ij}(\phi+2\pi)=\Gamma_{ij}(\phi)$，$\Gamma_{ij}(0)=0$ である。($\Gamma_{ij}(0)\neq 0$ ならばこれを ω に繰込んでおけばよい。) また，$\Gamma_{ij}(\phi)=\Gamma_{ji}(\phi)$ を仮定しておく。まず最近接相互作用のみが働く場合

$$\dot{\phi}_i=\Gamma(\phi_i-\phi_{i-1})+\Gamma(\phi_i-\phi_{i+1}) \tag{3}$$

を考え，簡単の為に 2π 周期関数 $\Gamma(\phi)$ をその基本波だけで近似する。即ち，

$$\Gamma(\phi)=-K\{\sin(\phi+\alpha)-\sin\alpha\},\quad |\alpha|<\frac{\pi}{2} \tag{4}$$

このような振動子間相互作用をもつ2振動子系 $\dot{\phi}_1=\Gamma(\phi_1-\phi_2)$，$\dot{\phi}_2=\Gamma(\phi_2-\phi_1)$ を考えてみればすぐに判ることであるが，$K>0$ ならば相互作用は位相を互に揃えるように働き，$K<0$ ならば互に180°位相となるように働く。スピン系の言葉を用いれば，それぞれ強磁性的及び反強磁性的相互作用であるといえよう。位相の空間変動が緩やかであると仮定すると，連続体近似 $(\phi_i\to\phi(x))$ が成り立ち，微分展開の最低次近似の結果，方程式(1)$'$が得られる。ここに，$\nu=a^2K\cos\alpha$，$\mu=a^2\sin\alpha$ である。強磁性的結合の場合に限り，ノーマルな位相拡散 $\nu>0$ が保証される。また，まさに ϕ_x^2 項の重要性にふれたが，この項は $\alpha\neq 0$ であってはじめて存在できる。我々の系はスピン系特にXYスピン系と幾分か似ているが，スピン間相互作用に対

してはむしろ$\alpha=0$である。何となれば，この場合にのみ(2)のような運動方程式を生成するリヤプノフ関数（熱力学ポテンシャルに対応）が存在して，その相互作用エネルギーが$\cos(\phi_1-\phi_2)$の形になるからである。$\alpha\neq0$ならば系はnon-variationalであり，これに対応するような熱力学系を考えることはできない。

さて，位相乱流方程式(1)を振動格子模型から導出してみよう。第二近接相互作用まで考慮するとこれが可能である。そこで，

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ij}(\phi) &= -K_1\{\sin(\phi+\alpha_1)-\sin\alpha_1\} && (j=i\pm1)\\
&= K_2\{\sin(\phi+\alpha_2)-\sin\alpha_2\} && (j=i\pm2)\\
&= 0 \qquad (\text{otherwise})
\end{aligned}
$$

と置く。ここでK_1，$K_2>0$を仮定する。即ち，最近接とは強磁性的，第二近接とは反強磁性的にカップルするという競合的な系を考えるわけである。スピン系の場合，競合的なカップリングはしばしば複雑なスピン配列を生じる。特に上のタイプのカップリングはイジング系の場合にはANNNI模型として知られている。$\alpha_2=0$と置いても以下に述べることの本質は変らないのでこうしておく。再びϕの緩やかな空間依存性を仮定して，(2)の連続体近似を求めると，最低近似で(1)が得られる。ここに，$\nu=a^2(K_1\cos\alpha_1-4K_2)$，$\mu=a^2K_1\sin\alpha_1$，$\lambda=-\frac{a^4}{12}\times(K_1\cos\alpha_1-16K_2)$。ただし，(1)の導出にあたっては$|\nu|$が微小量であることを用いている。すなわち，$K_1\cos\alpha_1\simeq4K_2$が必要である。このとき，$\lambda>0$は確かにみたされている。方程式(1)が乱流を示すということは，このようにスピン系のフラストレーションとの対応で考えると面白い。$\alpha\neq0$なるnon-variational系において競合的な相互作用が存在する場合には，空間パターンの複雑性に加えて，そもそも平衡パターン自身が実現しにくくなり，必然的に時空的カオス，即ち乱流が生じると考えられるのである。

参考文献

1) Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence,* (Springer, 1984).

2) P. Manneville, Workshop on “Macroscopic Modelling of Turbulent Flows and Fluid Mixtures” O. Pironneau ed. Lecture Motes in Physics (Springer, 1985).

3) Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. Suppl. **79** (1985) (to appear).